UNIVERSITE PAUL SABATIER

TOULOUSE III

L3 Parcours Physique et Application à l'Energie
EL5PPAB1E2

Année 2011/2012

EXAMEN TERMINAL DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Mardi 17 janvier 2012 - Durée 2h

TOUT DOCUMENT INTERDIT – PARTIES INDEPENDANTES

I – Résoudre l'équation différentielle suivante : $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = \cos x$.

II – On considère l'équation différentielle vérifiée par la charge $q(t)$ d'un condensateur : $L\dfrac{d^2q(t)}{dt^2} + \dfrac{q(t)}{C} = E(t)$, (L, C : constantes positives). On suppose qu'à l'instant initial $q(t = 0)$ = 0, $dq(t = 0)/dt$ = 0, $E(t = 0)$ = 0 et qu'à cet instant on applique une force électromotrice définie par : $E(t) = \begin{cases} \dfrac{E_0 t}{T_0} & pour \quad 0 < t < T_0, \\ 0 & t \geq T_0. \end{cases}$.

1. Déterminer la transformée de Laplace $Q(p)$ de $q(t)$.
2. Décomposer $\dfrac{1}{p^2(\tau^2 p^2 + 1)}$ et $\dfrac{1}{p(\tau^2 p^2 + 1)}$ en éléments simples.
3. En déduire l'expression de $q(t)$. On explicitera le résultat dans les deux cas : $0 < t < T_0$ et $t \geq T_0$.

III – On considère la fonction porte Π et la fonction triangle Λ définies par :

$$\Pi(x) = 1 \text{ pour } |x| \leq 1/2, \text{ et } 0 \text{ sinon},$$

$$\Lambda(x) = 1 - |x| \text{ pour } |x| \leq 1, \text{ et } 0 \text{ sinon}.$$

1. Calculer la transformée de Fourier pour chacune de ces fonctions.
2. Calculer la dérivée de Λ au sens des distributions. En déduire la transformée de Fourier de Λ en utilisant la transformée de Fourier de la fonction porte. Retrouver le résultat de la question précédente.
3. Montrer, grâce à la transformée de Fourier, que $\Lambda = \Pi * \Pi$.
4. Retrouver le résultat de la question précédente par un calcul direct de l'intégrale de convolution.